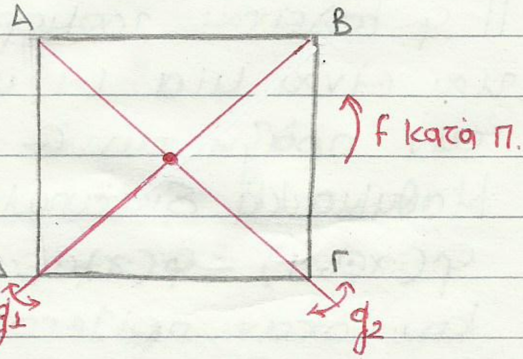
ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ:

Κατανόηση της έννοιας του Ισομορφισμού:

Έστω το τετράγωνο (ΑΒΓΔ) το οποίο ορίζαμε να έχει τέσσερις συμμετρίες (επίπεδες), την ταυτοτική e, τη στροφή f κατά γωνία π (περί το κέντρο του) και δυο κατοπτρισμούς g_1 και g_2 ως προς τις διαγώνιους. Αυτές οι συμμετρίες συγκροτούν μια ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης με πίνακα πράξης:



$\circ$	e	f	g_1	g_2
e	e	f	g_1	g_2
f	f	e	g_2	g_1
g_1	g_1	g_2	e	f
g_2	g_2	g_1	f	e

$f^2=e$

$g_1^2=g_2^2=e$

(Προσοχή: Η στροφή είναι κατά π rad)

Τώρα, ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Z}_8$ δεν μπορεί να το καθιστά ομάδα. Οπότε αναγκαστικά θα πρέπει να κατασκευάσαμε ένα σύνολο ώστε να ορίζεται ο πολλαπλασιασμός στο modulo 8. Αυτό το σύνολο είναι το: $G'=\{1,3,5,7\}$ όπου με την πράξη του πολ/μου είναι ομάδα με τον εξής πίνακα πράξης:

$[\cdot]_8$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	1	3	5	7
$\bar{3}$	3	1	7	5
$\bar{5}$	5	7	1	3
$\bar{7}$	7	5	3	1

Έτσι, λοιπόν παρατηρούμε κάποια "ομοιότητα" στους δυο αυτούς πίνακες. Οι ομάδες έχουν ίδιο πλήθος στοιχείων καθώς επίσης τα στοιχεία $\bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, f, g_1, g_2$ έχουν ίδια τάξη.

Ουσιαστικά, η μόνη διαφορά είναι ο τρόπος αναπαράστασης αυτών των στοιχείων σε κάθε πίνακα. Θεωρούμε, λοιπόν την συνάρτηση

$\varphi: G=\{e,f,g_1,g_2\} \to G'=\{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}\}$ τέτοια ώστε:

$e \mapsto \bar{1}$, $f \mapsto \bar{3}$, $g_1 \mapsto \bar{5}$, $g_2 \mapsto \bar{7}$

οπότε γενικά τώρα για λόγους απλότητας θεωρούμε την συνάρτηση/απεικόνιση:
$\varphi: G \to G'$ έτσι ώστε $x \in G \mapsto x' \in G'$.
Παρατηρήσαμε προηγουμένως στους 2 πίνακες ότι τα στοιχεία (ως προς την πράξη) συνδυάζονται με παρόμοιο τρόπο, δηλαδή γενικά αν $x \mapsto x'$, $y \mapsto y'$ τότε $x \cdot y \mapsto x' \cdot y'$ μέσω της φ.
Η φ καλείται ισομορφισμός μεταξύ των G & G' και είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση που μεταφέρει την πράξη της G στην πράξη της G'.
Μαθηματικά διατυπωμένο
$\varphi(x \odot_G y) = \varphi(x) \odot_{G'} \varphi(y)$, $\forall x, y \in G$
και όταν ορίζεται μια τέτοια απεικόνιση μεταξύ δύο ομάδων G & G' τότε αυτές θα καλούνται ισόμορφες ($G \cong G'$).
Χάριν συντομίας καταργούμε το συμβολισμό $\odot_{G,G'}$ και από εδώ και πέρα θα έχουμε το συνήθη συμβολισμό του πολ/μου

Συνέπειες του παραπάνω ορισμού

1) Με το να ορίσουμε ισομορφισμό μεταξύ δύο ομάδων, εξασφαλίζεται ισότητα των πληθικών αριθμών τους.

2) Αν έχουμε ορίσει μεταξύ δύο ομάδων G και G', έναν ισομορφισμό $\varphi: G \to G'$, δηλαδή:
$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in G$ τότε δεν μας νοιάζει αν πολ/σουμε πρώτα τα x και y και μετά απεικονίσουμε το $x \cdot y$ στην G' ή αν απεικονίσουμε τα x και y πρώτα στην G' και πολ/σουμε τις εικόνες

3) Εάν $\varphi: G \xrightarrow{\cong} G'$ τότε $\varphi^{-1}: G' \xrightarrow{\cong} G$

Παραδείγματα:

1) Κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι ισόμορφη του $\mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

Έστω G άπειρη κυκλική ομάδα με γεννήτορα το στοιχείο $x \in G$, τότε ορίζοντας συνάρτηση $\varphi: G \to \mathbb{Z}$ τύπου $\varphi(x^n) = n$ παρατηρούμε ότι όντας επί (εξ ορισμού της) και αφού $\varphi(x^n \cdot x^m) = \varphi(x^{n+m}) = n+m = \varphi(x^n) + \varphi(x^m)$, $\forall x \in G$ και 1-1 (διότι $\varphi(x^n) = \varphi(x^m) \Rightarrow x^n = x^m \Rightarrow n = m$) τότε η φ ισομορφισμός μεταξύ των G και $\mathbb{Z}$

2) Κάθε πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_n$.

ΛΥΣΗ

Έστω G πεπερ. κυκλική και με γεννήτορα το στοιχείο $x \in G$, τότε ορίζοντας τη συνάρτηση $\varphi: G \to \mathbb{Z}_n$ τύπου $\varphi(x^k) = k \bmod n$ παρατηρούμε ότι $\varphi(x^{k_1} \cdot x^{k_2}) = \varphi(x^{k_1+k_2}) = (k_1+k_2) \bmod n =$
$= k_1 \bmod n + k_2 \bmod n = \varphi(x^{k_1}) + \varphi(x^{k_2})$, $\forall x \in G$
όπου είναι επί (εξ ορισμού της, εντός αυτού είναι ομάδες ίδιου πλήθους) και 1-1 (διότι $\varphi(x^{k_1}) = \varphi(x^{k_2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow k_1 \bmod n = k_2 \bmod n$) τότε φ ισομορφισμός μεταξύ των G και $\mathbb{Z}_n$

3) Το σύνολο $K = \{1, -1, i, -i\}$ ως προς το συνήθες γινόμενο μιγαδικών αριθμών απαρτίζει μια ομάδα με γεννήτορες το i ή $-i$ και μάλιστα είναι ισόμορφη της $\mathbb{Z}_4$.

ΛΥΣΗ

Επομένως: μπορούν να οριστούν δύο ισομορφισμοί

1^{os}: $1 \mapsto \bar{0}$, $i \mapsto \bar{1}$, $-1 \mapsto \bar{2}$, $-i \mapsto \bar{3}$ και

2^{os}: $1 \mapsto \bar{0}$, $-i \mapsto \bar{1}$, $-1 \mapsto \bar{2}$, $i \mapsto 3$

και βάσει του (2) είναι ισόμορφη (η K) της $\mathbb{Z}_4$.

4) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}^+$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ότι υπάρχει $\varphi : \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}^+$ και ας είναι $x \in \mathbb{Q} : \varphi(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}^+$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \overset{\text{ισομ.}}{=\!=} \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \alpha$$

οπότε $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\alpha}$ άτοπο διότι $\sqrt{\alpha}$ δεν είναι πάντοτε ένας ρητός αριθμός, για παράδειγμα αν $\alpha = 4 \rightsquigarrow \sqrt{\alpha} = \sqrt{4} = 2$ αλλά αν $\alpha = 2$ τότε $\sqrt{\alpha} = \sqrt{2}$ άρρητος!!!

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΟΜΑΔΩΝ

Έστω $\varphi : G \to G'$ ισομορφισμός ομάδων. Τότε

1) $(|G| = |G'|$ και$)$ $\varphi(e_G) = e_{G'}$
2) $\varphi(x^k) = \varphi(x)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ και $x \in G$
3) Εάν $o(x) = n \Rightarrow o(\varphi(x)) = n$, $n \in \mathbb{N}$ και $x \in G$
4) Εάν G αβελιανή $\Rightarrow G'$ αβελιανή
5) Εάν $\varphi' : G' \to G''$ ισομορφισμός $\Rightarrow \varphi' \circ \varphi : G \to G''$ ισομορφισμός

<u>Απόδειξη</u>

1) $\varphi(e_G) = \varphi(e_G \cdot e_G) \overset{\varphi \text{ ισομορφ.}}{=\!=} \varphi(e_G) \cdot \varphi(e_G) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(e_G)\varphi(e_G)^{-1} = \varphi(e_G)\cdot\varphi(e_G)\cdot\varphi(e_G)^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(e_G) = e_{G'}$

2) $\varphi(x^k) = \varphi(\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{k \text{ φορές}}) \overset{\varphi \text{ ισομορφ}}{=\!=} \overbrace{\varphi(x)\varphi(x) \ldots \varphi(x)}^{k \text{ φορές}} = \varphi(x)^k$, $\forall x \in G$

3) Έστω $o(x) = n \Rightarrow x^n = e_G \Rightarrow \varphi(x^n) = e_{G'} \Rightarrow o(\varphi(x)) \mid n$
Επίσης, ξέρουμε από θεωρία ότι αν $\varphi : G \xrightarrow{\cong} G'$ τότε $\exists \varphi^{-1} : G' \xrightarrow{\cong} G$ και τότε $o(x) = n \mid o(\varphi(x))$. Άρα, $o(\varphi(x)) = n$

4) G αβελιανή $\Rightarrow (\forall x, y \in G) : xy = yx$ ⊛
Έστω $x', y' \in G$ και μάλιστα $\varphi(x) = x'$ και $\varphi(y) = y'$
τότε $x' \cdot y' = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \overset{\varphi \text{ ισομ.}}{=\!=} \varphi(x \cdot y) \overset{⊛}{=} \varphi(y \cdot x) \overset{\varphi \text{ ισομ.}}{=\!=}$
$= \varphi(y) \cdot \varphi(x) = y' \cdot x'$

5) Αφήνεται ως άσκηση (Υποδ. Νδο $\varphi' \circ \varphi$ 1-1 και επί)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εάν $\varphi : G \to G'$ ισομορφισμός ομάδων και $H \leq G$ τότε και η εικόνα του H, $\varphi(H) \leq G'$

Απόδειξη

Καταρχάς $\varphi(H) \subseteq G'$ και $\varphi(H) \neq \emptyset$ (αφού $H \leq G$ τότε θα υπάρχει το $e_G \in H$ αλλά μέσω του ισομορφισμού φ ισχύει $\varphi(e_G) = e_{G'} \in \varphi(H)$).

Έστω x', y' εν $\varphi(H)$ τ.ω. $x' = \varphi(x)$ και $y' = \varphi(y)$ όπως επί $x \in H$, $y \in H$

Θδο $x' \cdot y' \in \varphi(H)$.

$x' \cdot y' = \varphi(x)\varphi(y) \overset{\varphi \text{ ισομ}}{=\!=} \varphi(\overbrace{x \cdot y}^{\in H}) \in \varphi(H)$

Έπειτα θεωρούμε τυχόν $x' \in \varphi(H)$ και θδο $x'^{-1} \in \varphi(H)$

$x'^{-1} \overset{\text{ιδιοτ.}}{=} \varphi(\underbrace{x^{-1}}_{\in H}) \overset{\text{ιδιοτ.}}{=\!=} \varphi(x)^{-1} \in \varphi(H)$.

Συνεπώς, $\varphi(H) \leq G'$